4. Carga axial – esfuerzos normales – Parte 1 -

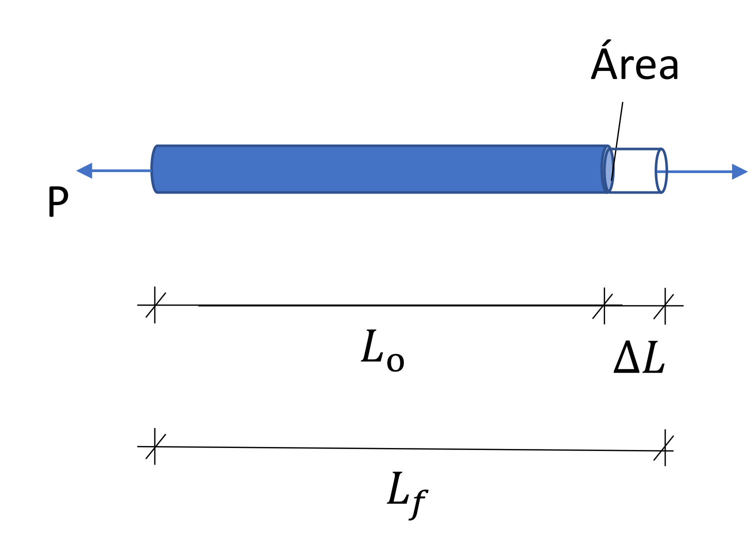
Mecánica de Sólidos

Profesor: Juan Nicolás Villamizar Gonzalez, M.Sc.

Departamento de Ingeniería Civil



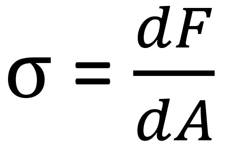
4.1 Teoría de esfuerzos y deformaciones



General: $\varepsilon = \lim_{L \to 0} \frac{\Delta L}{L}$

Real: $\varepsilon = \int_{L_o}^{L_f} \frac{dL}{L} = Ln\frac{L_f}{L_o} = Ln\frac{L_o + \Delta L}{L_o} = Ln(1 + \varepsilon_o)$

Ingeniería: $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_o}$



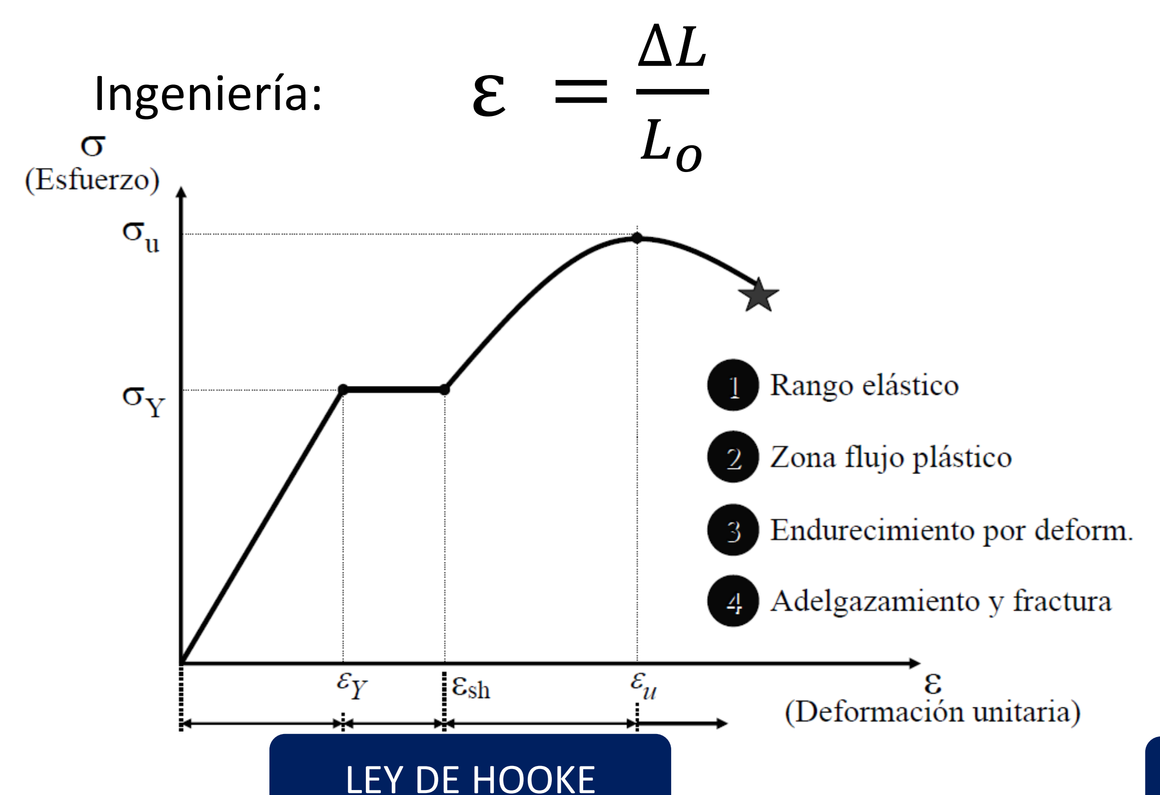
$\sigma = \frac{dF}{dA}$

$\sigma = \frac{P}{A_i}$

$\sigma = \frac{P}{A_o}$

A_i: *Área instantánea*

A_o: *Área inicial*



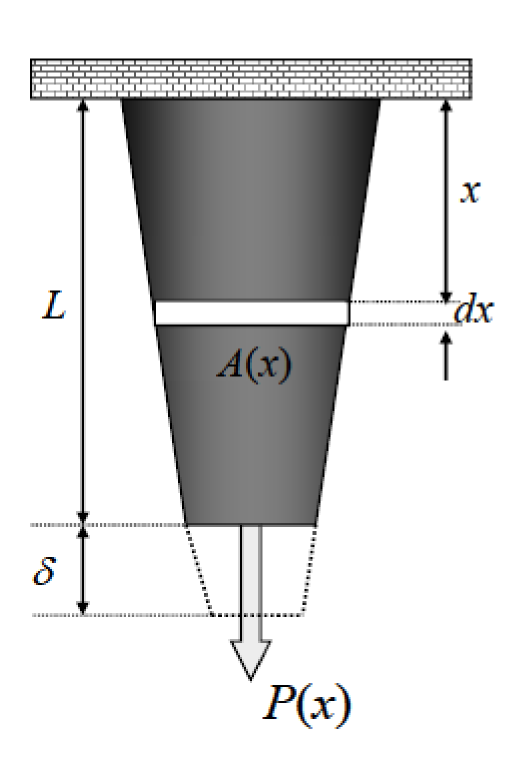
TEORÍA

LEY DE HOOKE

INDETERMINACIÓN

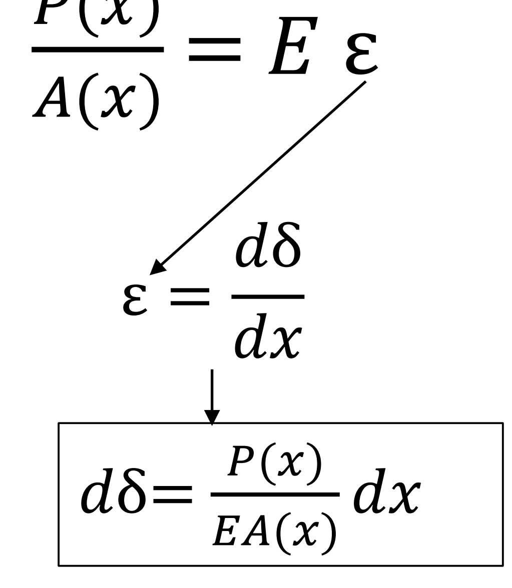
4.1 Teoría de esfuerzos y deformaciones

Deformaciones de elementos sometidos a carga axial:



1 Equilibrio: $\sigma = \dfrac{P(x)}{A(x)}$

2 Ley Material $\sigma = E\,\varepsilon$



3 Compatibilidad deformaciones $\varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L_o}$

$$\delta = \frac{PL}{EA}$$

TEORÍA

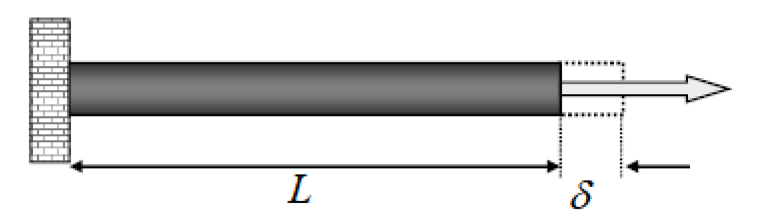
LEY DE HOOKE

INDETERMINACIÓN

4.1 Teoría de esfuerzos y deformaciones

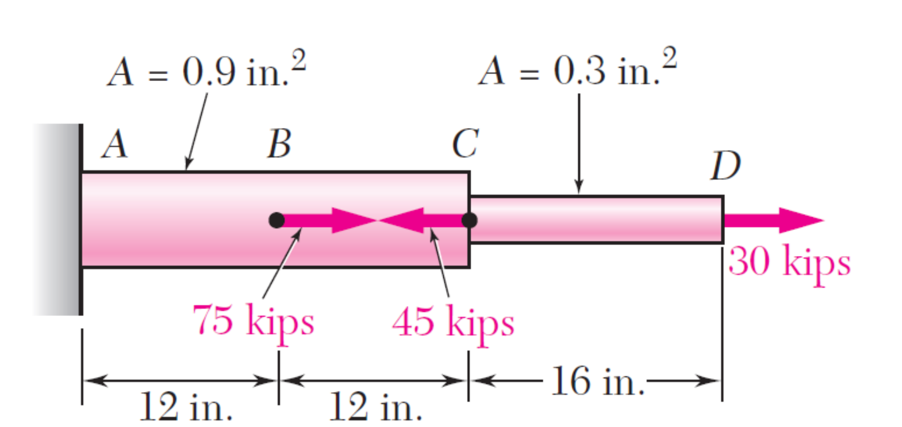
$$\delta = \int_0^L \frac{P\,dx}{AE}$$

Sistema de carga constante:



$$\delta = \frac{PL}{EA}$$

Sistema de sección, módulo y carga variable



$$\delta = \Sigma \frac{P_i L_i}{E_i A_i}$$

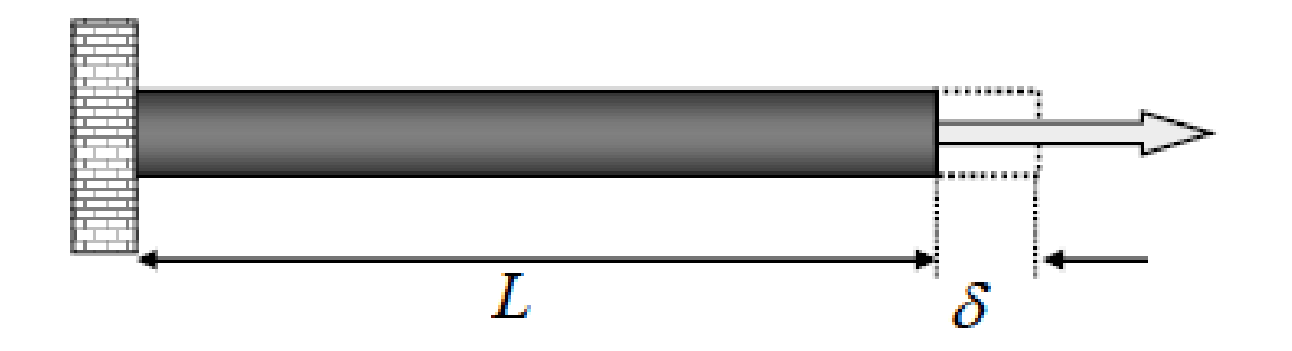
TEORÍA

LEY DE HOOKE

INDETERMINACIÓN

4.1 Teoría de esfuerzos y deformaciones

Rigidez y flexibilidad de un elemento estructural:



$$\delta = \frac{PL}{EA}$$

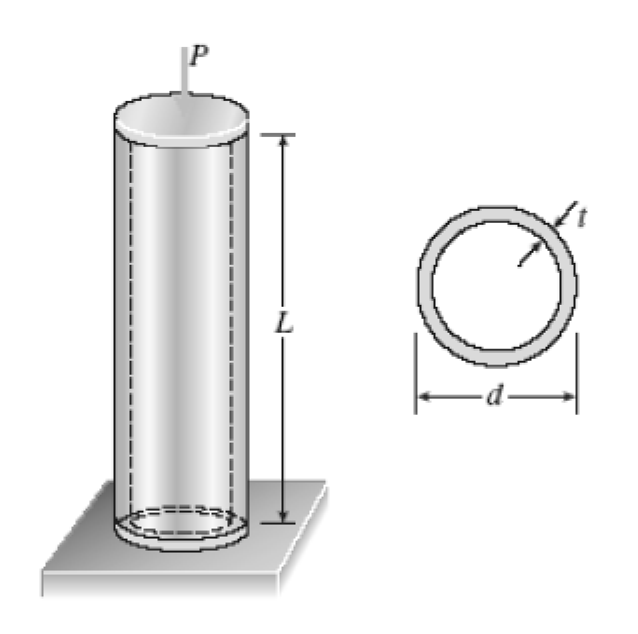
$$P = k\delta$$

Rigidez: $k = EA/L$

Flexibilidad: $f = 1/k = L/EA$

4.1 Teoría de esfuerzos y deformaciones

Ejemplo 1:



Una columna hueca de acero (E = 30 000 ksi) con una longitud L = 8ft. y un diámetro d = 7.5in, está sujeta a compresión con una carga P = 85k. Si el esfuerzo permisible es 7000psi y el acortamiento permisible es 0.02in. ¿Cuál es el mínimo espesor de la pared de la columna, tmin?

$P = 85\ \text{k}$
$E = 30{,}000\ \text{psi}$
$L = 8.0\ \text{ft}$
$d = 7.5\ \text{in}$
$\sigma_{allow} = 7{,}000\ \text{psi}$
$\delta_{allow} = 0.02\ \text{in}$

TEORÍA
LEY DE HOOKE
INDETERMINACIÓN

4.1 Teoría de esfuerzos y deformaciones

Ejemplo 1:

Área basada en esfuerzo permisible:

$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad A = \frac{P}{\sigma_{allow}} = \frac{85k}{7{,}000psi} = 12.14in^2$$

Área basada en deformación permisible:

$$\delta = \frac{PL}{EA} \qquad A = \frac{PL}{E\delta_{allow}} = \frac{(85k)(96in)}{(30{,}000ksi)(0.02in)} = 13.60in^2$$

$$A_{min} = 13.60 \text{ in}^2$$

Espesor mínimo:

$$A = \frac{\pi}{4}\left(d^2 - (d-2t)^2\right)$$

$$\frac{4A}{\pi} - d^2 = -(d-2t)^2$$

$$d^2 - \frac{4A}{\pi} = (d-2t)^2$$

$$d - 2t = \sqrt{d^2 - \frac{4A}{\pi}}$$

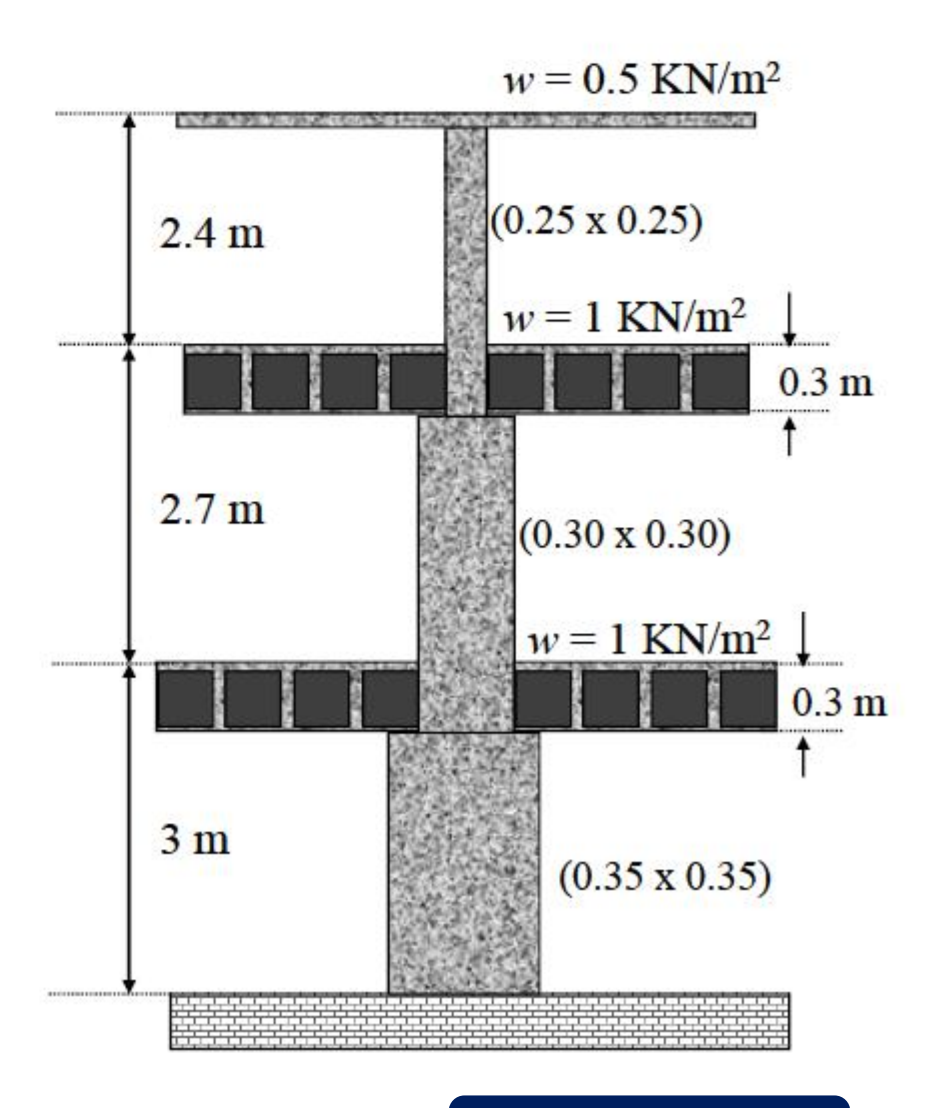
$$t = \frac{d}{2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \frac{A}{\pi}}$$

$$t_{min} = \frac{d}{2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \frac{A_{min}}{\pi}}$$

4.1 Teoría de esfuerzos y deformaciones

Ejemplo 2:

Calcule el desplazamiento vertical de la estructura en la cubierta. Suponga que el área aferente de cada columna es de 25m2 y que Ec = 20GPa.



TEORÍA

LEY DE HOOKE

INDETERMINACIÓN

4.1 Teoría de esfuerzos y deformaciones

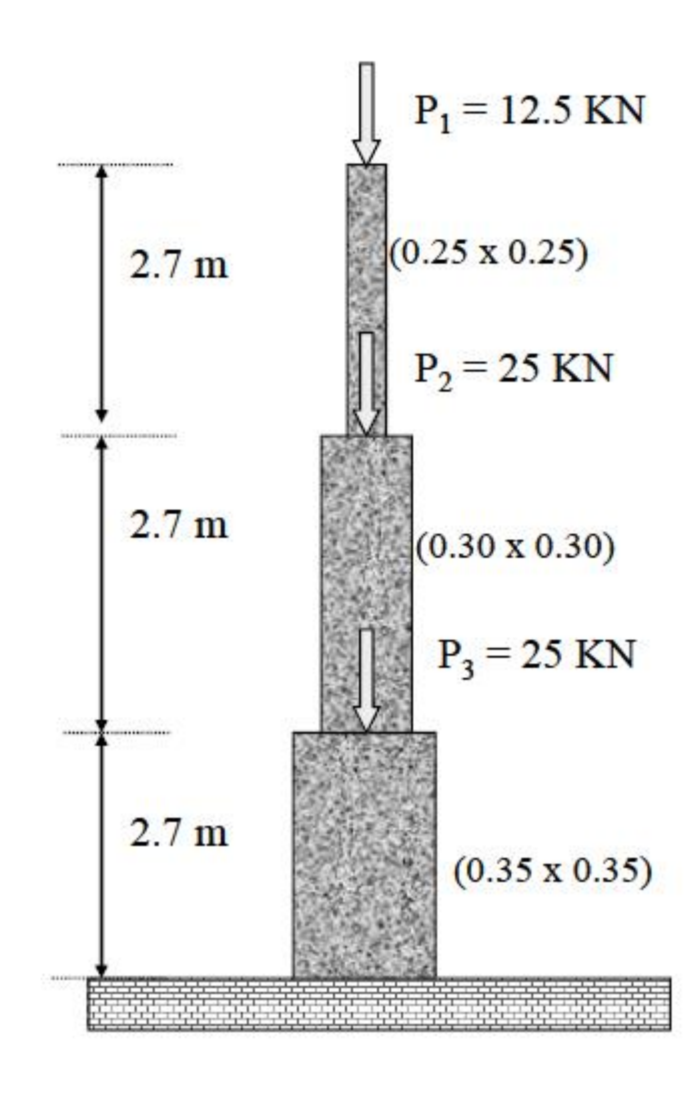
Ejemplo 2:

Áreas por piso:

$A_1 = (0.25)(0.25) = 0.063\ m^2$
$A_2 = (0.30)(0.30) = 0.09\ m^2$
$A_3 = (0.35)(0.35) = 0.123\ m^2$

Cargas por piso:

$P_1 = (0.5)(25) = 12.5\ KN$
$P_2 = (1)(25) = 25\ KN$
$P_3 = (1)(25) = 25\ KN$



Deflexión por piso:

$\delta_C = (2.7/E_C)[(12.5/0.063)+(37.5/0.09)+(62.5/0.123)]$

$\delta_C = 1.516\ x10^{-7}\ m \downarrow$

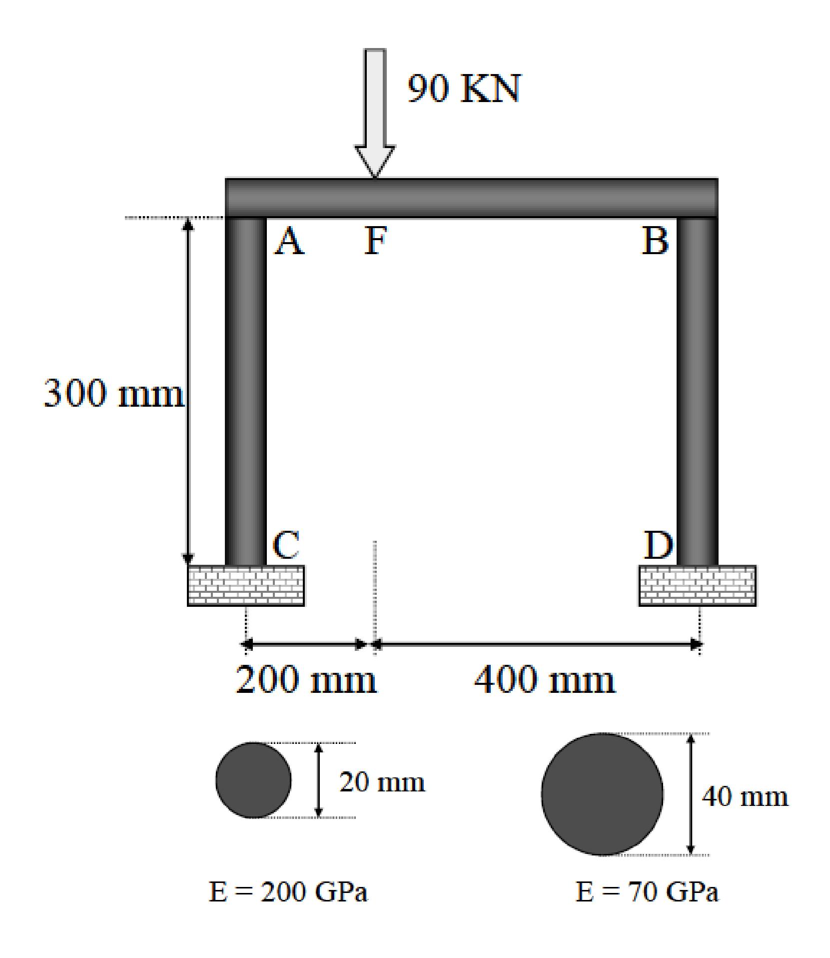
TEORÍA

LEY DE HOOKE

INDETERMINACIÓN

4.1 Teoría de esfuerzos y deformaciones

Ejemplo 3:



¿Cuál es el desplazamiento de la viga en el punto de aplicación de la carga?

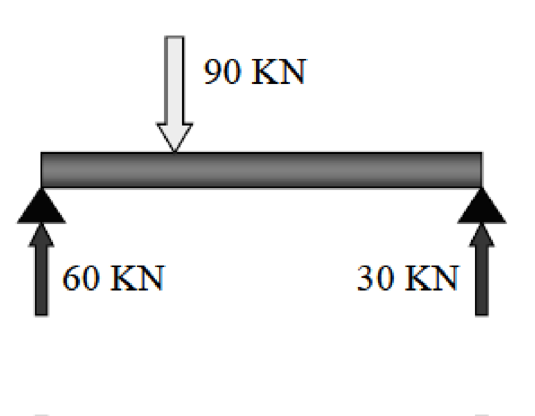
TEORÍA

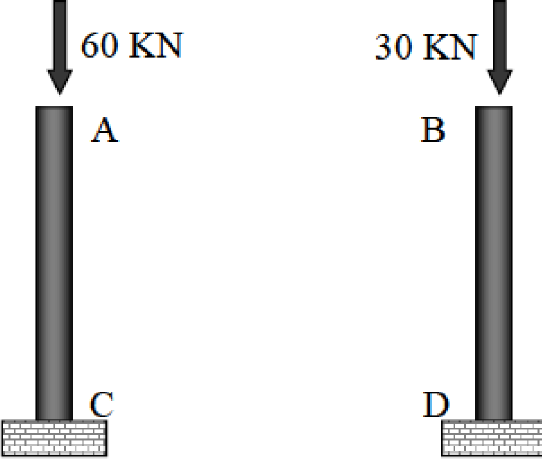
LEY DE HOOKE

INDETERMINACIÓN

4.1 Teoría de esfuerzos y deformaciones

Ejemplo 3:





Desplazamiento vertical de cada columna:

δ_{AC} = PL/AE = (-60000*0.3)/(0.01$^2\pi$*200x10^9)
δ_{AC} = -286x10^{-6} m = 0.286 mm↓

δ_{BD} = (-30000*0.3)/(0.01$^2\pi$*70x10^9)
δ_{BD}= -102x10^{-6} m = 0.102 mm↓

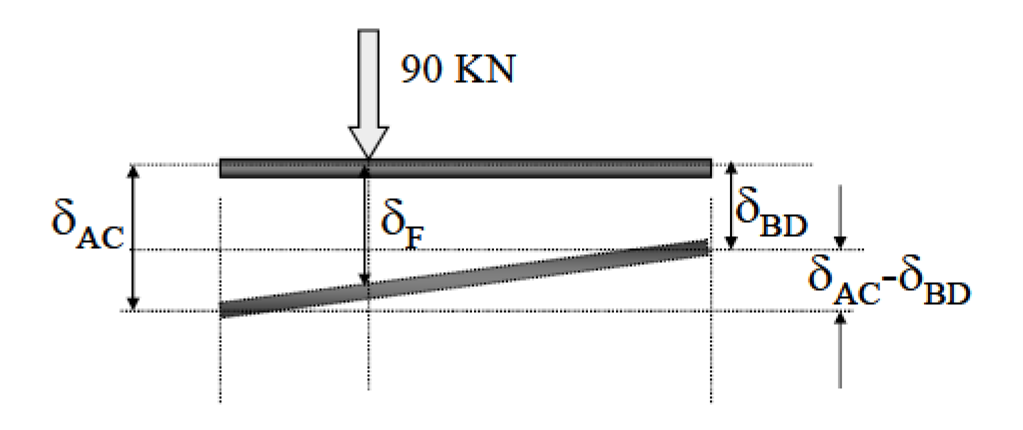
TEORÍA

LEY DE HOOKE

INDETERMINACIÓN

4.1 Teoría de esfuerzos y deformaciones

Ejemplo 3:



Desplazamiento vertical del punto de aplicación de la carga (F):

$\delta_F = \delta_{BD} + (\delta_{AC} - \delta_{BD})400/600$

$\delta_F = 0.102 + (0.184/600)*400$

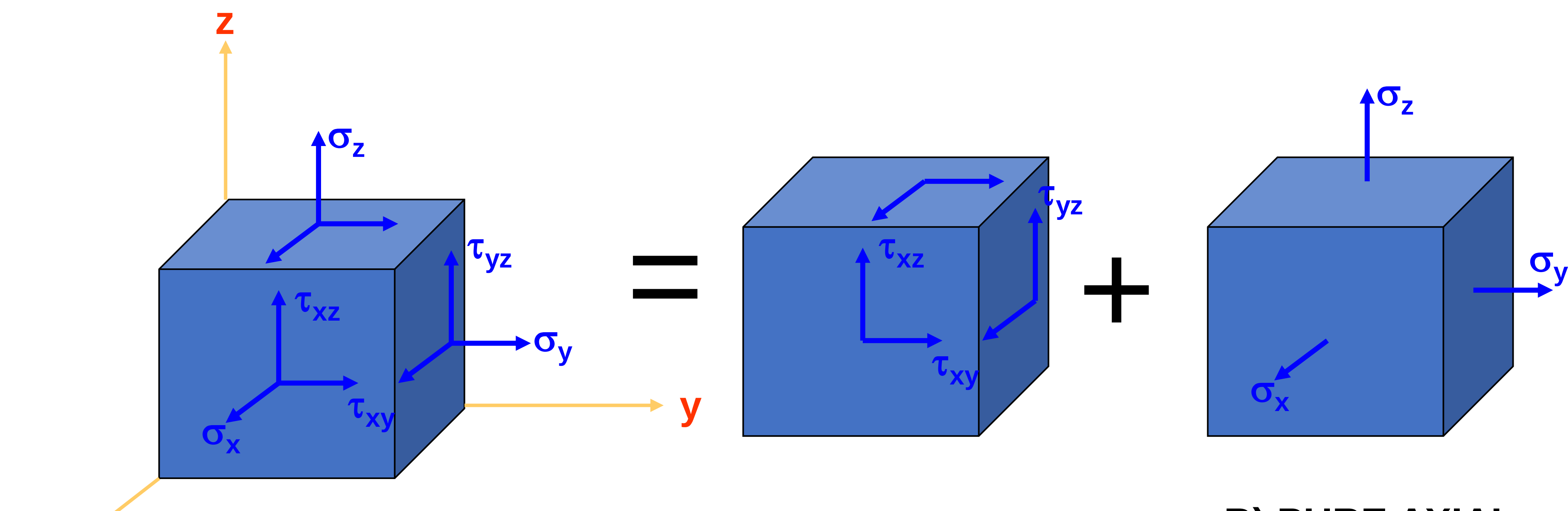
$\delta_F = 0.225$ mm↓

TEORÍA

LEY DE HOOKE

INDETERMINACIÓN

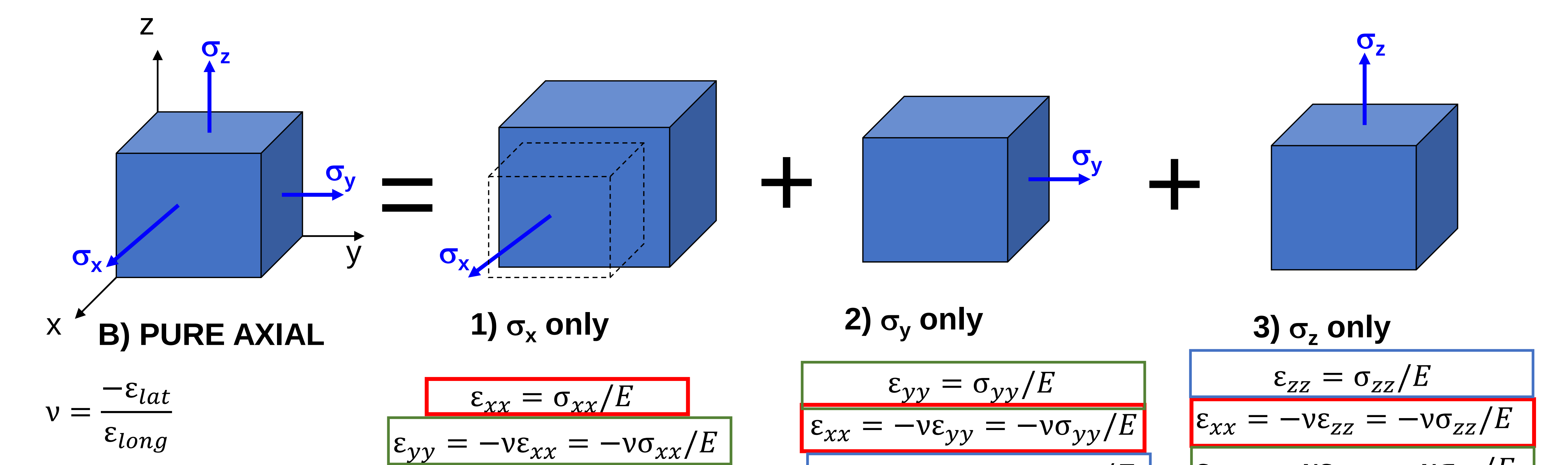
4.2 Ley de Hooke generalizada



x

A) PURE SHEAR	B) PURE AXIAL
$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$	$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$
$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$	$\sigma_{yy} = E\varepsilon_{yy}$
$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$	$\sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz}$

4.2 Ley de Hooke generalizada



$$\nu = \frac{-\varepsilon_{lat}}{\varepsilon_{long}}$$

1) σ_x only

$$\varepsilon_{xx} = \sigma_{xx}/E$$

$$\varepsilon_{yy} = -\nu\varepsilon_{xx} = -\nu\sigma_{xx}/E$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu\varepsilon_{xx} = -\nu\sigma_{xx}/E$$

2) σ_y only

$$\varepsilon_{yy} = \sigma_{yy}/E$$

$$\varepsilon_{xx} = -\nu\varepsilon_{yy} = -\nu\sigma_{yy}/E$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu\varepsilon_{yy} = -\nu\sigma_{yy}/E$$

3) σ_z only

$$\varepsilon_{zz} = \sigma_{zz}/E$$

$$\varepsilon_{xx} = -\nu\varepsilon_{zz} = -\nu\sigma_{zz}/E$$

$$\varepsilon_{yy} = -\nu\varepsilon_{zz} = -\nu\sigma_{zz}/E$$

Agrupando:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{zz}]$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}]$$

4.2 Ley de Hooke generalizada

- Deformaciones normales en términos de esfuerzos normales

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \upsilon(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \upsilon(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \upsilon(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

POLAR (Circular)

$$\varepsilon_L = \frac{1}{E}\left[\sigma_L - \upsilon\sigma_R\right]$$

$$\varepsilon_R = \frac{1}{E}\left[\sigma_R - \upsilon\sigma_L\right]$$

- Esfuerzos normales en términos de deformaciones normales

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\upsilon)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\upsilon)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)\right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\upsilon)}\left[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right]$$

POLAR (Circular)

$$\sigma_L = \frac{E}{(1-\upsilon\text{^}2)}\left[\varepsilon_L + \nu\varepsilon_R\right]$$

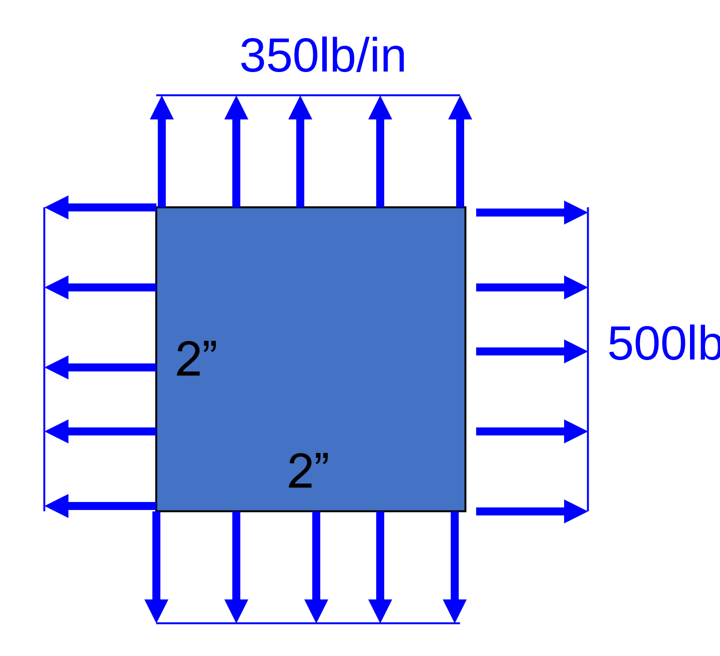
$$\sigma_R = \frac{E}{(1-\upsilon\text{^}2)}\left[\varepsilon_R + \nu\varepsilon_L\right]$$

- Esfuerzos de corte en función de def. corte

$\tau_{xy}=G\gamma_{xy}$ $\tau_{xz}=G\gamma_{xz}$ $\tau_{yz}=G\gamma_{yz}$

Ejemplo: Para la platina de 2''x2''x1/4'', encuentre las dimensiones finales para el estado de carga

E=597 ksi, ν = 0.25



$$\sigma_{xx} = \frac{500\,\frac{lb}{in}}{1/4in} = 2ksi \qquad \sigma_{yy} = \frac{350\,\frac{lb}{in}}{1/4in} = 1.4ksi \qquad \sigma_{zz} = 0$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}] \qquad \varepsilon_{xx} = \frac{1}{597}[2 - 0.25(1.4) - 0.25(0)] = 2.76e-3$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta L_x}{L_x} \qquad \Delta L_x = \varepsilon_{xx} L_x = (2.76e-3)2'' = 5.53e-3''$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{zz}] \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{597}[1.4 - 0.25(2) - 0.25(0)] = 1.51e-3$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\Delta L_{yy}}{L_y} \qquad \Delta L_y = \varepsilon_{yy} L_y = (1.51e-3)2'' = 3.02e-3''$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}] \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{1}{597}[0 - 0.25(2) - 0.25(1.4)] = -1.42e-3$$

$$\Delta L_z = \varepsilon_{zz} L_z = (-1.42e-3)0.25'' = -3.56e-3''$$

$$L_{fx} = L_x + \Delta L_x = 2.0055''$$
$$L_{fy} = L_y + \Delta L_y = 2.003''$$
$$L_{fz} = L_z + \Delta L_z = 0.2464''$$

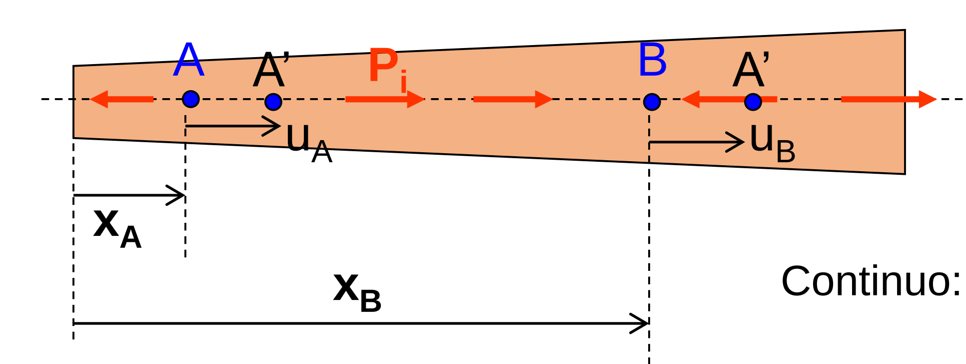
TEORÍA

LEY DE HOOKE

INDETERMINACIÓN

4.3 Sistemas indeterminados

- Ecuaciones de equilibrio son **insuficientes** para determinar fuerzas internas/externas.
- Se deben considerar ecuaciones adicionales de **compatibilidad**.



Deflexión entre A y B:

$$\delta_{AB} = u_B - u_A = \int_{x_A}^{x_B} \varepsilon(x)dx$$

Incluyendo ley de Hooke:

Continuo:

$$\delta_{AB} = u_B - u_A = \int_{x_A}^{x_B} \frac{N(x)}{A(x)E(x)}dx$$

N(x): fuerzas axial interior…donde se corte

A(x): Sección transversal

Segmentos: (Discreto) con N,A,E=constante

$$\delta_{AB} = u_B - u_A = \sum_{A}^{B} \delta_i$$

donde:

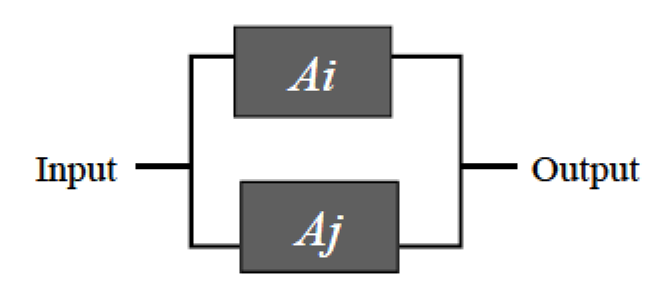
$$\delta_i = \frac{N_i L_i}{A_i E_i}$$

Deflexión en el segmento i^{th}

TEORÍA LEY DE HOOKE INDETERMINACIÓN

4.3 Sistemas indeterminados

Sistemas en paralelo: El sistema falla si todos los componentes fallan



$$F_t = \Sigma F$$

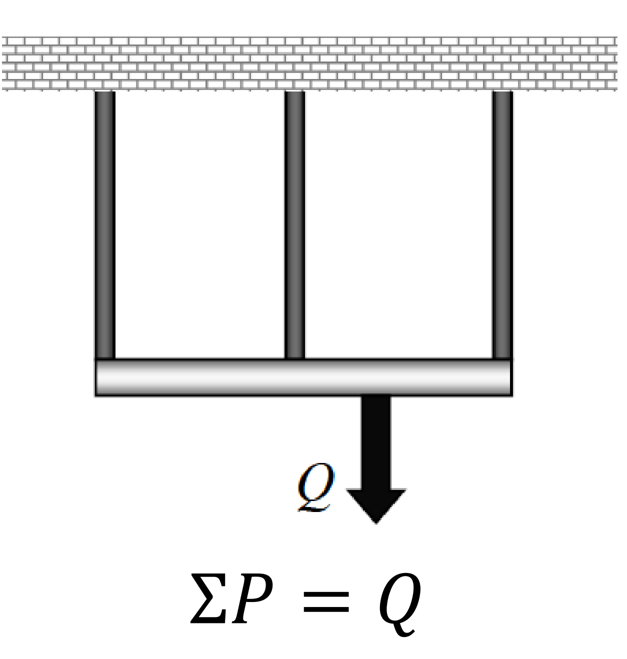
$$F_t = F_1 + F_2 + F_3$$

$$k_t u_t = k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3$$

Si los desplazamientos son iguales:

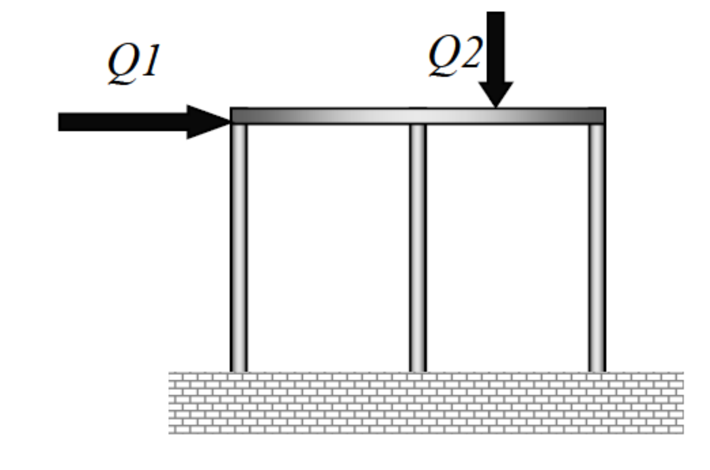
$$k_t = k_1 + k_2 + k_3$$





$$\Sigma P = Q$$

Ejemplo 2:



$$\Sigma \vec{P} = \vec{Q}$$

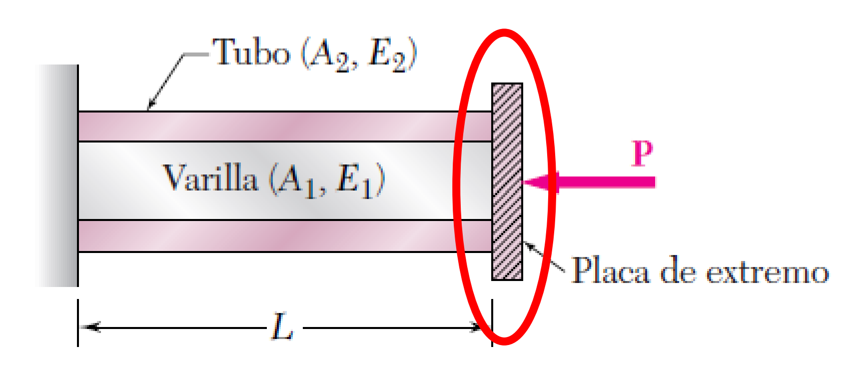
TEORÍA

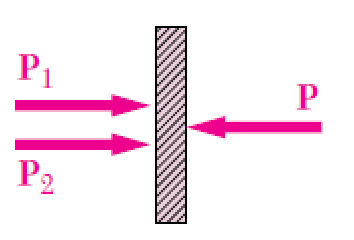
LEY DE HOOKE

INDETERMINACIÓN

4.3 Sistemas indeterminados

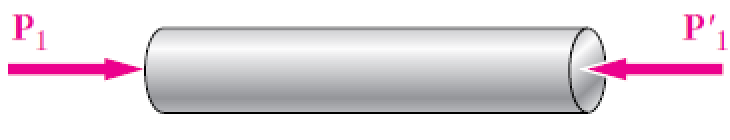
Ejemplo: Encuentre la deflexión del sistema ante la carga P aplicada

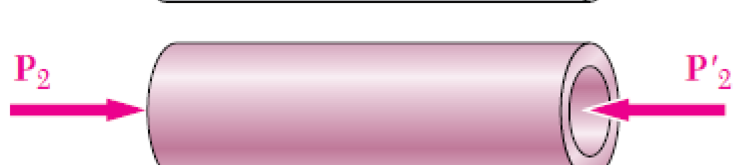




Equilibrio: $P = P_1 + P_2$

Compatibilidad: $\delta_1 - \delta_2 = 0$ $\quad$ $\delta_1 = \delta_2$





Ley del material: $\delta_1 = \frac{P_1 L}{E_1 A_1}$ $\quad$ $\delta_2 = \frac{P_2 L}{E_2 A_2}$

$$\frac{P_1 L}{E_1 A_1} = \frac{P_2 L}{E_2 A_2} \longrightarrow P_1 = \frac{P_2 L}{E_2 A_2}\left(\frac{E_1 A_1}{L}\right)$$

$$P_2 = P - P_1 \longrightarrow P_2 = P - \frac{P_2 L}{E_2 A_2}\left(\frac{E_1 A_1}{L}\right) \longrightarrow P_2 E_2 A_2 L = P E_2 A_2 L - P_2 L (E_1 A_1) \longrightarrow P_2 = \frac{P E_2 A_2 L}{E_2 A_2 L + E_1 A_1 L}$$

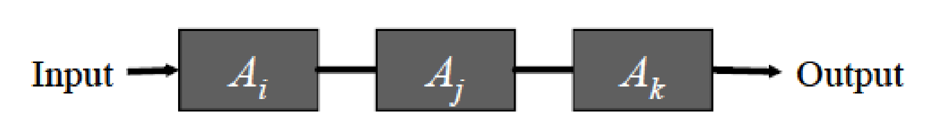
TEORÍA

LEY DE HOOKE

INDETERMINACIÓN

4.3 Sistemas indeterminados

Sistemas en serie: El sistema falla si uno de los componentes fallan



$$U_t = \Sigma U$$

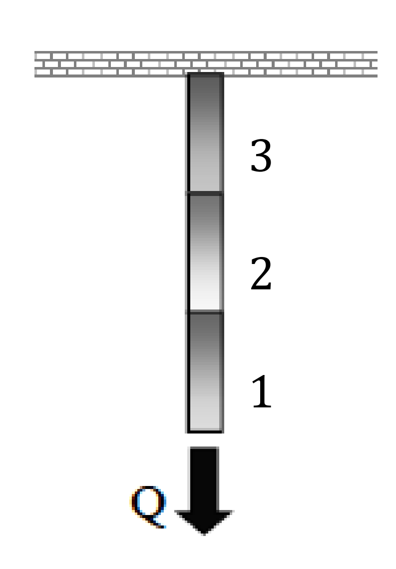
$$U_t = U_1 + U_2 + U_3$$

$$\frac{f_t}{k_t} = \frac{f_1}{k_1} + \frac{f_2}{k_2} + \frac{f_3}{k_3}$$

Si las fuerzas son iguales:

$$\frac{1}{k_t} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$$

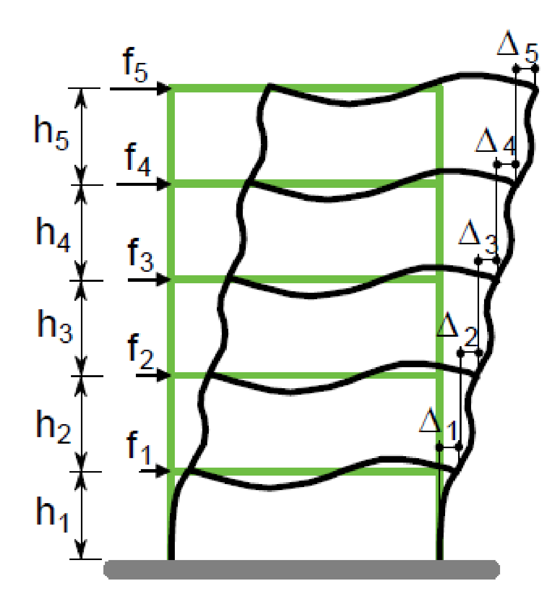
Ejemplo 1:



$$U_t = U_1 + U_2 + U_3$$

$$\frac{1}{k_t} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$$

Ejemplo 2:



$$U_t = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5$$

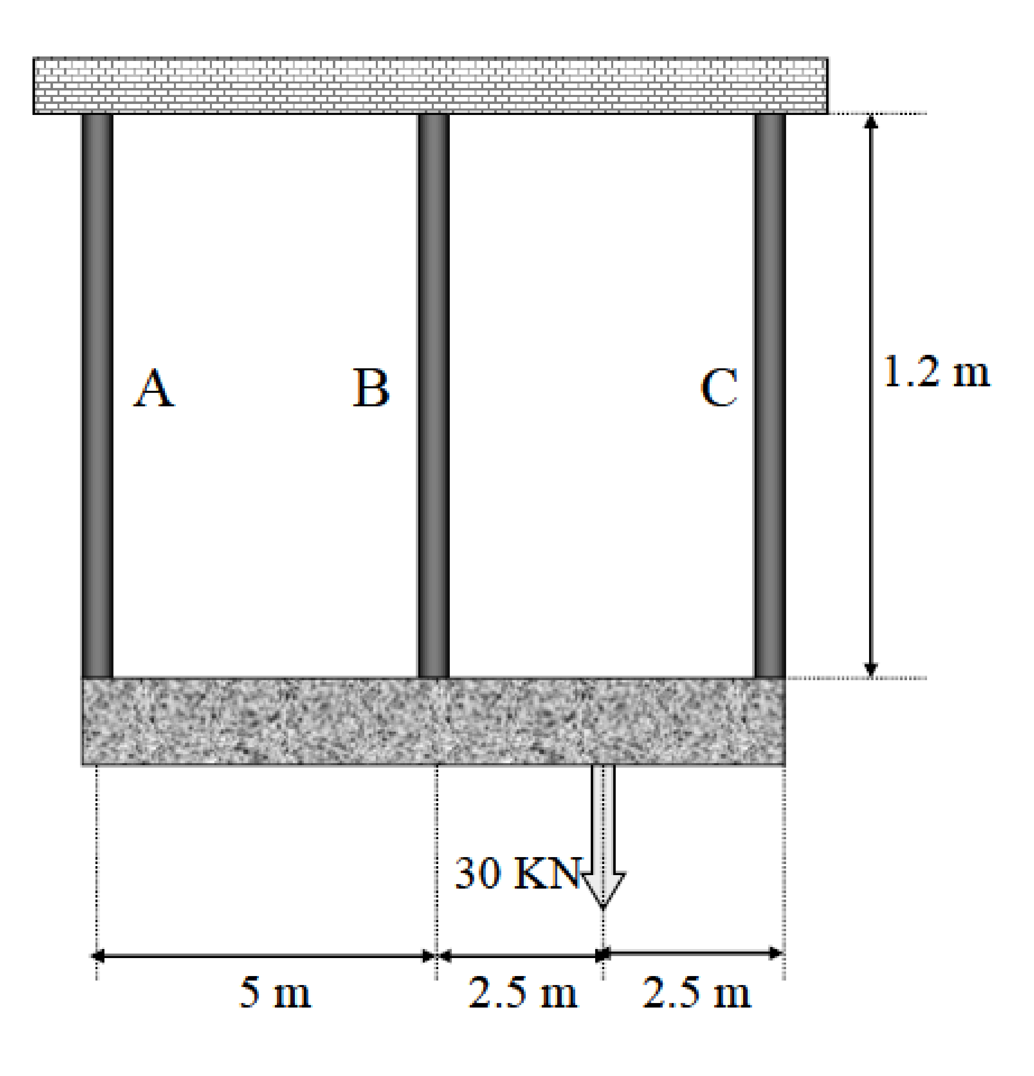
TEORÍA

LEY DE HOOKE

INDETERMINACIÓN

4.3 Sistemas indeterminados

Tarea:



Dados:
$A_A = A_B = A_C = 200\ mm^2$
$E = 200\ KN/m^2$

Calcular la tensión en cada cable.

TEORÍA

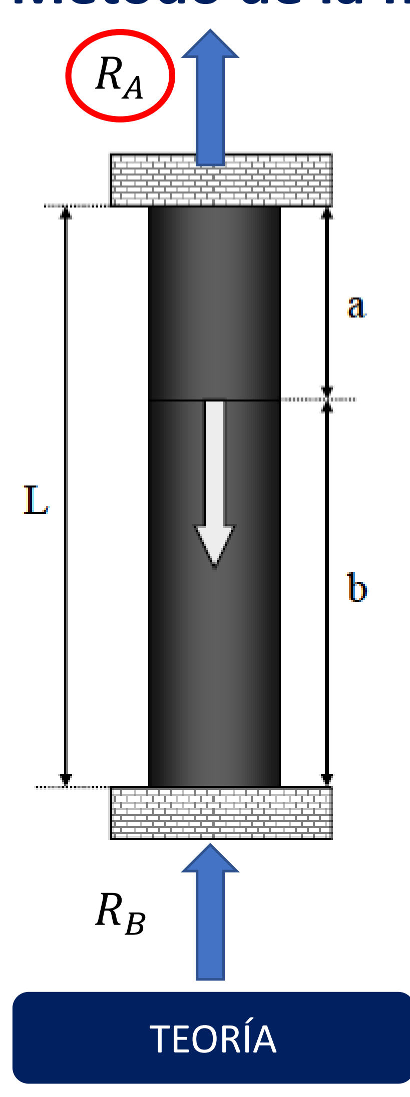
LEY DE HOOKE

INDETERMINACIÓN

4.3 Sistemas indeterminados

Método de la flexibilidad:

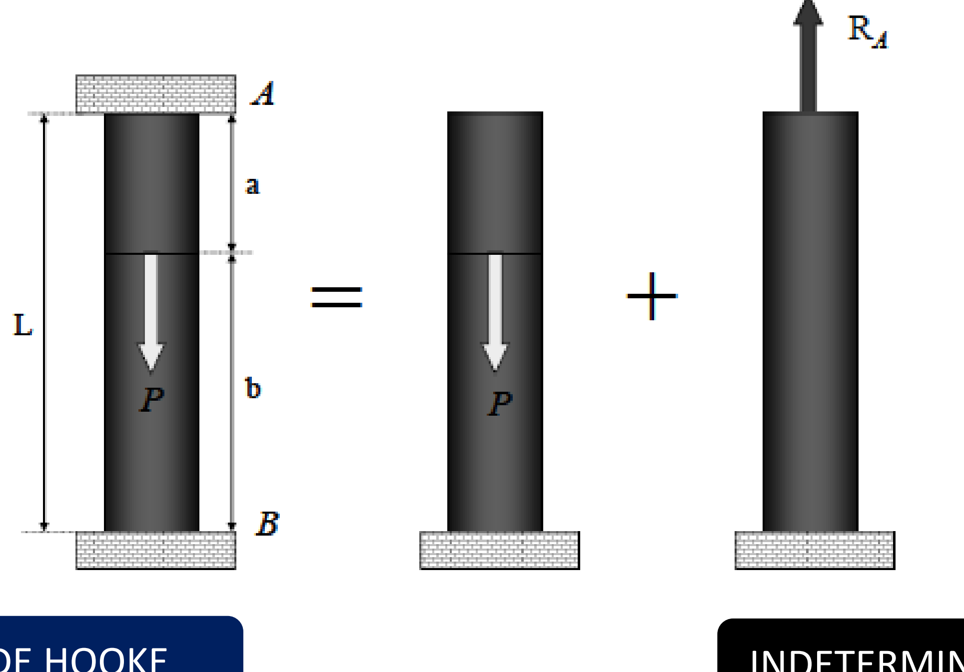
Fuerzas **desconocidas**, desplazamientos **conocidos**



Procedimiento

1. Seleccionar como redundante una de las reacciones desconocidas R_A

2. Liberar estructura (retirar el soporte) y generar dos estructuras.



TEORÍA

LEY DE HOOKE

INDETERMINACIÓN

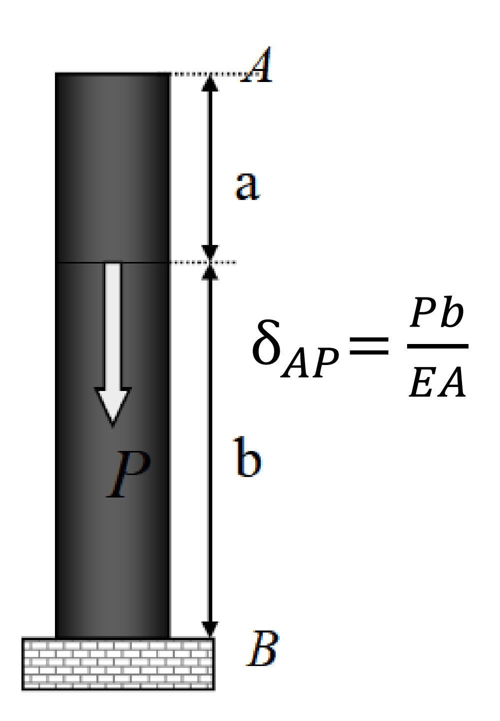
4.3 Sistemas indeterminados

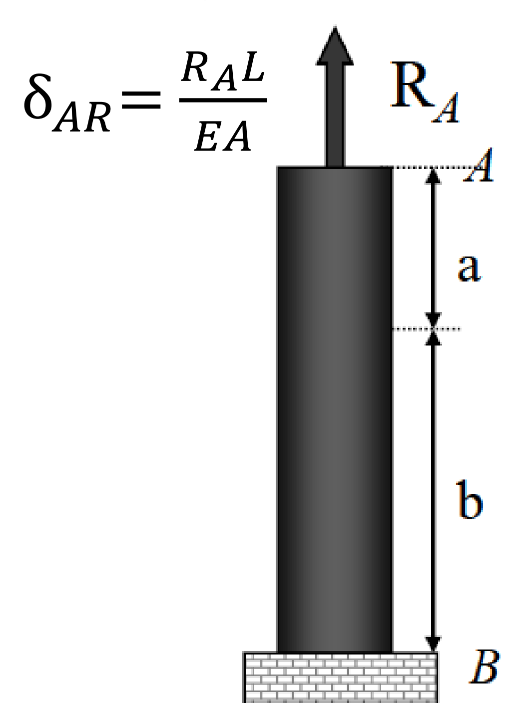
Método de la flexibilidad:

Fuerzas **desconocidas**, desplazamientos **conocidos**

Procedimiento

3. Solucionar los dos problemas de forma independiente (Hallar la deflexión en cada sistema)





TEORÍA

LEY DE HOOKE

INDETERMINACIÓN

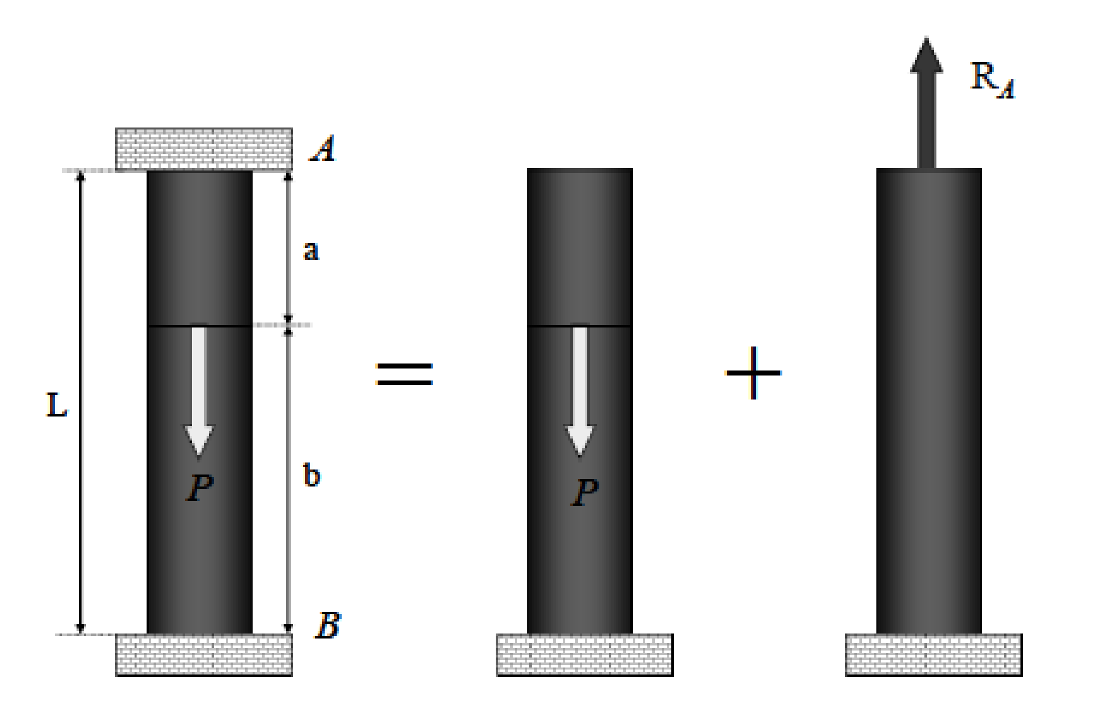
4.3 Sistemas indeterminados

Método de la flexibilidad:

Fuerzas desconocidas, desplazamientos conocidos

Procedimiento

4. Utilizar compatibilidad y resolver fuerzas desconocidas



Compatibilidad: Como $\delta_A = 0 \rightarrow \delta_{AP} = \delta_{AR}$

$$\frac{Pb}{EA} = \frac{R_A L}{EA} \qquad R_A = \frac{Pb}{L}$$

Equilibrio: $\Sigma F_y = 0 \rightarrow R_B + R_A - P = 0$

$$R_B + \frac{Pb}{L} - P = 0 \rightarrow R_B + \frac{Pb}{L} - P = 0 \rightarrow R_B = P\left(1 - \frac{b}{L}\right)$$

TEORÍA

LEY DE HOOKE

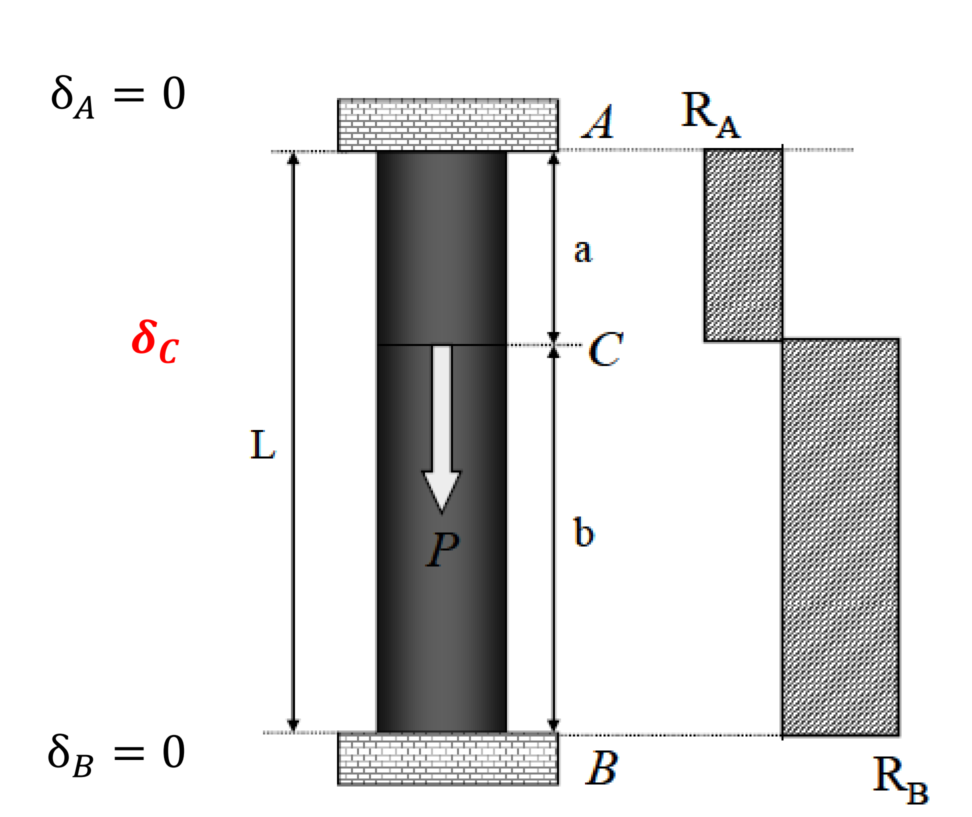
INDETERMINACIÓN

4.3 Sistemas indeterminados

Método de rigidez:

Fuerzas conocidas, desplazamientos desconocidos

Procedimiento



1. Seleccionar un desplazamiento conveniente como variable desconocida $\boldsymbol{\delta_C}$

$$\delta_C = \frac{R_A a}{EA} \qquad \delta_C = \frac{R_B b}{EA}$$

2. Relacionar las fuerzas mediante una ecuación de equilibrio

$$R_A + R_B = P$$

3. Representar las fuerzas en términos de los desplazamientos

$$\delta_C = \frac{R_A a}{EA} \rightarrow \boxed{R_A = \frac{EA}{a}\delta_C} \qquad \delta_C = \frac{R_B b}{EA} \rightarrow \boxed{R_B = \frac{EA}{b}\delta_C}$$

TEORÍA | LEY DE HOOKE | INDETERMINACIÓN

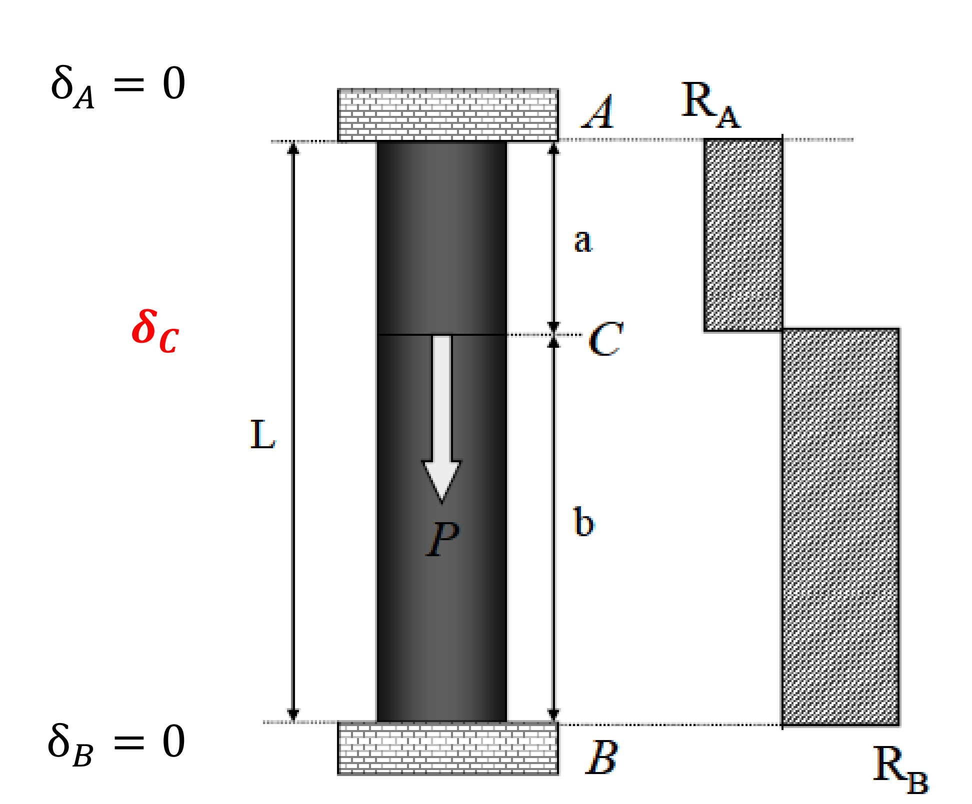
4.3 Sistemas indeterminados

Método de rigidez:

Fuerzas conocidas, desplazamientos desconocidos

Procedimiento

$\delta_A = 0$



δ_C

$\delta_B = 0$

4. Se resuelve el sistema para el desplazamiento desconocido

$$R_A + R_B = P \longrightarrow \frac{EA}{a}\delta_C + \frac{EA}{b}\delta_C = P \longrightarrow \delta_C = \frac{P}{EA}\left(\frac{ab}{a+b}\right)$$

5. Determinar las fuerzas a partir de los desplazamientos

$$R_A = \frac{EA}{a}\delta_C = \frac{EA}{a}\frac{P}{EA}\left(\frac{ab}{a+b}\right) \rightarrow R_A = \frac{Pb}{L}$$

$$R_B = \frac{EA}{b}\delta_C = \frac{EA}{b}\frac{P}{EA}\left(\frac{ab}{a+b}\right) \rightarrow R_B = \frac{Pa}{L}$$

TEORÍA

LEY DE HOOKE

INDETERMINACIÓN

Referencias de clase

- BEER, F; JOHNSTON, E.R.; DEWOLF J., MAZUREK D. Mecánica de Materiales, 5ª Edición. Mc. Graw-Hill.
- Correal, J. F. *Mecánica de materiales* [Material de clase]. Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.
- Smith, J.P. *Mechanics of materials* [Material de clase], Seattle University, Seattle, US.